Федеральное агентство по образованию российской федерации
ГОУ ВПО «ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра компьютерной топологии и алгебры

**Е. А. Сбродова**

# АЛГЕБРА

методические указания
для студентов-заочников математического факультета
ГОУ ВПО «ЧелГУ»

Челябинск 2010

# Введение

Настоящие методические указания помогут студентам-заочникам в изучении дисциплины «Алгебра»и, в частности, в овладении навыками решения задач. При изучении любого раздела математики важны как теоретическая часть, так и практическая. Решение задач является необходимым условием для глубокого понимания и усвоения материала. Данные методические указания содержат контрольные задания, которые студент должен выполнить.

Методические рекомендации содержат краткие теоретические сведения и примеры решения задач, которые помогут при выполнении контрольных работ. Следует отметить, что этих сведений недостаточно. Список рекомендуемой литературы приведен в конце.

При выполнении контрольной работы и представлении ее на проверку студент должен руководствоваться следующими правилами.

1. Номер варианта контрольной работы равен последней цифре номера зачетной книжки.

2. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради и сдана на кафедру компьютерной топологии и алгебры на проверку не позднее чем за две недели до начала сессии.

3. На титульном листе должно быть указано: контрольная работа по алгебре, номер варианта, фамилия имя отчество студента, группа, фамилия преподавателя.

4. Для получения зачета по контрольной работе студент должен пройти собеседование с преподавателем, в ходе которого необходимо продемонстрировать понимание хода решения задач в своей работе.

5. Если при проверке контрольной работы обнаружены ошибки, то студент должен в той же тетради выполнить работу над ошибками и сдать ее для проверки.

6. Решение задач из контрольной работы должно быть достаточно подробным и логически последовательным.

# 1 Действия с матрицами

*Матрица* — это прямоугольная таблица чисел (элементов множества). Размером матрицы называется число ее строк и число столбцов.

$$A_{k\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Обращение к элементу матрицы происходит указанием номера строки и номера столбца. Например, элемент $a_{27}$ (читается: а два семь) стоит во второй строке и седьмом столбце. Две матрицы называются равными, если они имеют равные размеры и их элементы, стоящие на соответствующих местах, равны.

Всякую матрицу можно *умножить на число*, для этого нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

*Суммой* двух матриц $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ одинакового размера $k\times n$ называется матрица $C_{k\times n} = \{c_{ij}\}$, такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Если число столбцов матрицы $A_{k\times n}$ равно числу строк матрицы $B_{s\times t}$ (то есть $n = s$), то определено *умножение* $A \cdot B$. Результат умножения $A \cdot B$ есть матрица $C = \{c_{ij}\}$ размера $k \times t$, для которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Одна из особенностей операции умножения состоит в том, что произведение матриц в общем случае некоммутативно, то есть $AB \neq BA$. Приведите пример таких матриц $A$ и $B$, что $AB \neq BA$. Матрица

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

играет роль единицы по умножению в матрицах, то есть для любой матрицы $A_{k\times s}$, $A \cdot E_{s\times s} = E_{k\times k} \cdot A = A$. Матрица $E$ называется *единичной матрицей.*

Операция *транспонирование* применима к любой матрице $A_{k\times n}$. Она заключается в том, что столбцы матрицы $A$ становятся строками и наоборот, строки — столбцами. Обозначается операция транспонирования верхним индексом $^t$, например $A^t$. Нетрудно заметить, что на месте $ij$ матрицы $A^t$ стоит элемент $a_{ji}$ матрицы $A$.

**Пример.** Для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ вычислить выражение $AB^t - C^2$.

Решение.

1) $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $AB^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3) $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $AB^t - C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.

# 2 Определитель

Существует несколько способов построения теории определителей ([3], §4, гл. 1; гл. 3; [9]). Вы можете выбрать любой подход. Приведем индуктивное определение.

*Определителем* квадратной матрицы $A_{n \times n}$ называется число $\det A$, равное

при $n = 1$, $\det(a_{11}) = a_{11}$;

при $n = 2$, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

предположим, что мы умеем вычислять определитель при $n = k$, тогда при $n = k + 1$, $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1(k+1)}A_{1(k+1)}$, где $A_{1j} = (-1)^{1+j} \det$(матрицы, полученной из $A$ вычеркиванием первой строки и $j$-го столбца).

Определитель матрицы будем обозначать либо $\det A$, либо $|A|$.

Вычисление определителя по определению вызывает ряд затруднений, связанных, в основном, с большим числом слагаемых в определении.

Используя свойства определителя (смотри §3, гл. 3 [3]), можно вычислить его, не прибегая к определению. Одним из таких способов вычисления является приведение определителя к треугольному виду.

**Пример.** Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Решение.** Наша задача привести матрицу к треугольному виду, то есть получить нули ниже (или выше) главной диагонали при помощи элементарных преобразований строк. Работая первой строкой, получим нули в первом столбце ниже главной диагонали. Вычтем из второй строки первую, из третьей — удвоенную первую, из четвертой — утроенную первую. Получим определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Поменяем вторую и третью строки местами, тем самым во второй строке и втором столбце получим единицу. Работать единицей гораздо удобнее нежели другим числом, так как не возникает дробей. В общем случае, получать единицу не обязательно. Заметим, что это преобразование изменит знак определителя на противоположный.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Работая второй строкой, получим нули во втором столбце ниже главной диагонали. Из третьей строки вычтем утроенную вторую, к четвертой строке прибавим вторую.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Покажем, как, не получая единицы в третьей строке, третьем столбце, получить нули в третьем столбце ниже главной диагонали. К четвертой строке прибавим третью, умноженную на $\frac{6}{4}$.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что определитель треугольной матрицы равен произведению элементов матрицы, стоящих на главной диагонали. В нашем случае $-(1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot \frac{-7}{2}) = -14$.

# 3 Обратная матрица

Матрица $A$ называется *обратимой*, если существует такая матрица $B$, что $AB = BA = E$. Матрица $B$ называется обратной к матрице $A$ и обозначается $A^{-1}$.

**Критерий обратимости.** Матрица $A$ обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Более того, обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^t,$$

где $A_{ij}$ — алгебраическое дополнение.

Предложенная формула удобна для вычисления лишь для матриц малых размеров. Например, чтобы найти обратную матрицу для матрицы размера $4 \times 4$, нужно вычислить 16 определителей порядка 3; $5 \times 5$ — 25 определителей порядка 4; и т.д.

Альтернативный способ нахождения обратной матрицы — метод Жордана-Гаусса. Справа, через вертикальную черту, от данной матрицы $A$ припишем единичную матрицу такого же размера. Действуя всей матрицей целиком, элементарными преобразованиями строк получим на месте матрицы $A$ единичную матрицу. Тогда приписанная справа единичная матрица преобразуется в матрицу $A^{-1}$.

$$(A|E) \longrightarrow (E|A^{-1})$$

**Пример.** Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Решение.**

Припишем к матрице $A$ единичную матрицу.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Из второй строки вычтем первую, из третий — учетверенную первую, из четвертой — утроенную первую. Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Удвоим вторую строку и вычтем из нее четвертую.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 25 & 3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Из третьей строки вычтем двадцать пять вторых строк, из четвертой — семнадцать вторых строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -29 & -50 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -20 & -34 & 0 & 18 \end{array}\right).$$

Из третьей строки вычтем четвертую.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -16 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -20 & -34 & 0 & 18 \end{array}\right).$$

К четвертой строке прибавим четыре третьих строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -16 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -56 & -98 & 4 & 46 \end{array}\right).$$

Третью строку поделим на $-1$, четвертую — на $-2$.

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23
\end{array}\right).
$$

Из первой строки вычтем четвертую.

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -6 & -1 & 0 & -27 & -49 & 2 & 23 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23
\end{array}\right).
$$

К первой строке прибавим третью.

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & -6 & 0 & 0 & -18 & -33 & 1 & 16 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23
\end{array}\right).
$$

К первой строке прибавим шесть вторых строк.

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -12 & -21 & 1 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23
\end{array}\right).
$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -12 & -21 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 9 & 16 & -1 & -7 \\ 28 & 49 & -2 & -23 \end{pmatrix}$.

# 4 Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k
\end{cases}
$$

*Матрицей коэффициентов при неизвестных* называется матрица

$$
A_{k\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.
$$

Столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ называется *столбцом свободных членов.*

Используя введенные обозначения систему линейных уравнений можно записать в матричном виде $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$.

*Решением* системы называется такой упорядоченный набор $c_1, c_2, \ldots,$ $c_n$ чисел, что при подстановке $c_i$ вместо $x_i$ каждое уравнение системы обращается в тождество.

Решение системы при помощи обратной матрицы. Пусть матрица $A$ коэффициентов при неизвестных является квадратной обратимой матрицей. Тогда система линейных уравнений имеет единственное решение и его можно найти следующим образом: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Еще одним способом решения систем линейных уравнений является правило Крамера (смотри [3] §3, гл. 3). Пусть матрица $A$ коэффициентов при неизвестных является квадратной и $\det A \neq 0$. Тогда система линейных уравнений имеет единственное решение и его можно найти следующим образом: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots$, $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где $\Delta = \det A$, $\Delta_i = \det($матрицы, полученной из $A$ заменой $i$-го столбца, столбцом свободных членов).

Универсальным способом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Материал по данному разделу можно найти в [3], §3, гл. 1; [6], §1, 2.

**Пример.** Найти методом Гаусса общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}.$$

**Решение.**

Расширенная матрица нашей системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right).$$

Элементарными преобразованиями строк приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)+3(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+9(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

Переменные $x_1$ и $x_2$, отвечающие вершинам ступенек, являются главными, остальные переменные $x_3$ и $x_4$ — свободными. Выразим главные переменные через свободные. Для этого в расширенной матрице получим нули над главной диагональю.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\div 11} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\div(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right)$$

Перейдем к уравнениям и выпишем ответ.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = -\frac{2}{11} \\ x_2 + \frac{5}{11}x_3 - \frac{1}{11}x_4 = \frac{10}{11} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{array} \right.$

# 5 Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где $a$ и $b$ — вещественные числа, элемент $i$ удовлетворяет условию $i^2 = -1$. Заметим, что элемент $i$ является корнем уравнения $x^2+1 = 0$, не разрешимого над множеством вещественных чисел, и, следовательно, не принадлежит $\mathbb{R}$. $i$ называется *мнимой единицей*.

На множестве комплексных чисел введены две операции сложение и умножение. Пусть даны два комплексных числа $z = a + bi$, $w = c + di$.

Тогда
• $z+w=(a+c)+(b+d)i$;
• $zw=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Относительно введенных операций множество комплексных числе образует поле (смотри [3] §1, гл. 5), которое мы будем обозначать через $\mathbb{C}$.

Пусть дано комплексное число $z=a+bi$. Комплексно сопряженным к числу $z$ называется число $a-bi$ и обозначается через $\overline{z}$. Для того, чтобы вычислить выражение $\frac{w}{z}$ с комплексными числами $w$ и $z$, нужно и числитель, и знаменатель умножить на комплексно сопряженное к знаменателю, В данном случае на $\overline{z}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Любое комплексное число $z=a+bi$ можно представить в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, при чем единственным образом. Такая запись называется *тригонометрической формой* комплексного числа $z$. Правила, по которым вычисляются $r$ и $\varphi$ довольно просты, $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi$ находится из двух условий $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$. Число $r$ называется *модулем* комплексного числа $z$ и обозначается через $|z|$. Число $\varphi$ называется *аргументом* числа $z$ и обозначается через $\arg z$. Тригономерическая форма удобна при перемножении и возведении в степень комплексного числа.

**Формула Муавра.** Пусть дано комплексное число $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда для любого целого числа $n$ справедлива формула

$$z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

**Извлечение корней.** Пусть дано комплексное число $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда для любого натурального числа $n$ все корни $\sqrt[n]{z}$ принадлежат множеству

$$\left\{|z|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}), k=0,1,\ldots,n-1\right\}.$$

**Пример.** Вычислить выражение $\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{120}$.

**Решение.**

Заметим, что $\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{120}=\frac{(2+2i)^{120}}{(\sqrt{3}+i)^{120}}$.

Вычислим по формуле Муавра выражения $(2+2i)^{120}$ и $(\sqrt{3}+i)^{120}$. Для этого найдем тригонометрические формы каждого из оснований.

$2+2i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$r=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi=\frac{2}{2\sqrt{2}}\\ \sin\varphi=\frac{2}{2\sqrt{2}}\end{array}\right. \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

Таким образом $2+2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Тогда по формуле Муавра $(2+2i)^{120} = (2\sqrt{2})^{120}(\cos\frac{120\pi}{4} + i\sin\frac{120\pi}{4}) = 2^{180}(\cos 30\pi + i\sin 30\pi) = 2^{180}$.

Аналогично $(\sqrt{3}+i)^{120} = (2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{120} = 2^{120}(\cos\frac{120\pi}{6}+i\sin\frac{120\pi}{6}) = 2^{120}(\cos 20\pi + i\sin 20\pi) = 2^{120}$.

Таким образом $\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{120} = \frac{2^{180}}{2^{120}} = 2^{60}$.

Ответ: $2^{60}$.

**Пример.** Записать в алгебраической форме элементы множества $\sqrt[4]{2i}$.

**Решение.**

Для того, чтобы воспользоваться формулой для нахождения корней из комплексного числа, нужно подкоренное выражение записать в тригонометрической форме.

$$2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

Тогда

$$\sqrt[4]{2i} = \left\{2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}), k = 0, 1, 2, 3\right\}$$

При $k=0$, $u_0 = 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) = 2^{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.
При $k=1$, $u_1 = 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}) = 2^{\frac{1}{4}}(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.
При $k=2$, $u_2 = 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}) = 2^{\frac{1}{4}}(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.
При $k=3$, $u_3 = 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}) = 2^{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.

Ответ: $2^{\frac{1}{4}}(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.

# Задания для контрольной работы № 1

**Задание № 1.**
Для матриц $A$, $B$, $C$, $D$

| № | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 2 | $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 3 | $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 4 | $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 5 | $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 6 | $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 7 | $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 8 | $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 9 | $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 0 | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |

вычислить (1) $AB - 2E$ ($E$ — единичная матрица подходящего размера); (2) $BA - C^2$; (3) $\det C$; (4) $\det D$; (5) $D^{-1}$ двумя способами (при помощи присоединенной матрицы и элементарных преобразований).

**Задание № 2.**

Вычислить определитель:

$$(1.)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix};\ (2.)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix};\ (3.)\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix};\ (4.)\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix};$$

$$(5.)\begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{vmatrix};\ (6.)\begin{vmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{vmatrix};\ (7.)\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(8.)\begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix};\ (9.)\begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};\ (0.)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

**Задание № 3.**

Найти решение системы линейных уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы.

$$(1.)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} (2.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(3.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} (4.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(5.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} (6.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 7x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(7.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} (8.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(9.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 10x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} (0.)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

**Задание № 4**

Найти общее решение системы линейных уравнений.

(1.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (2.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

(3.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (4.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

(5.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (6.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

(7.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (8.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 10x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

(9.) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (0.) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

**Задание № 5.**

Вычислить выражение:

(1.) $(1-i) + \frac{-1+2i}{2+i}$; (2.) $(3-i) + \frac{-2+2i}{1+i}$; (3.) $(3-i) + \frac{-1+3i}{2-i}$;

(4.) $(2+i) + \frac{2+3i}{3-2i}$; (5.) $(1+2i) + \frac{-1-3i}{2+i}$; (6.) $(-1+2i) + \frac{3-i}{1+i}$;

(7.) $(1-2i) + \frac{-1+3i}{-2+i}$; (8.) $(1+3i) + \frac{-3+5i}{1+i}$; (9.) $(3-5i) + \frac{2-6i}{-2+i}$;

(0.) $(-2+i) + \frac{-3+5i}{-1+i}$.

**Задание № 6.**

Вычислить выражения:

(1.) $\left(\frac{2-2i}{\sqrt{3}-i}\right)^{120}$; (2.) $\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{60}$; (3.) $\left(\frac{1+i}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{48}$; (4.) $\left(\frac{-1+i}{\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{120}$;

(5.) $\left(\frac{-1+i}{\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{60}$; (6.) $\left(\frac{-2-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{120}$; (7.) $\left(\frac{-1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{60}$; (8.) $\left(\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-i}\right)^{66}$;

(9.) $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{60}$; (0.) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{120}$.

**Задание № 7.**
Записать в алгебраической форме элементы множества:

(1.) $\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}}$; (2.) $\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{3}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}}}$; (3.) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}}$;

(4.) $\sqrt[6]{\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}+1-i}$; (5.) $\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}-1-i}$; (6.) $\sqrt[6]{\frac{1+i}{1-i}-1-i}$;

(7.) $\sqrt[4]{\frac{1-i}{1+i}+1+i}$; (8.) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$; (9.) $\sqrt[6]{\frac{1+i}{i}+i}$;

(0.) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{i}-1}$.

**Задание № 8.**
Решить уравнение над полем комплексных чисел:

(1.) $x^2+3x+3=0$; (2.) $x^2+2x+3=0$; (3.) $x^2+x+2=0$;

(4.) $x^2+x+4=0$; (5.) $x^2+2x+2=0$; (6.) $x^2-x+5=0$;

(7.) $x^2-2x+3=0$; (8.) $x^2-2x+2=0$; (9.) $x^2+3x+6=0$;

(0.) $x^2+2x+7=0$.

# 6 Многочлены от одной переменной

Пусть $K$ — коммутативное кольцо с единицей. *Многочленом* над кольцом $K$ от переменной $x$ называется выражение вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$, где все коэффициенты $a_i \in K$ почти все равны нулю, за исключением конечного их числа. На множестве всех многочленов от переменной $x$ над кольцом $K$ вводятся операции сложения и умножения.

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots) =$$
$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots$$
$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots)(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots) =$$
$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + (\sum_{i+j=n} a_ib_j)x^n + \dots$$

Относительно введенных операций множество многочленов образует коммутативное кольцо с единицей, обозначаемое через $K[x]$ (см. гл.5 §2 [3]).

Будем говорить, что многочлен $f(x) \in K[x]$ *делит* многочлен $g(x) \in K[x]$ с остатком, если найдутся такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что выполнено равенство $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, где степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $g(x)$ или $r(x) = 0$. Многочлен $r(x)$ называется *остатком* от деления многочлена $f(x)$ на $g(x)$ (см. гл.5 §3 [3]). Далее в качестве кольца $K$ будут рассматриваться либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$.

На примере рассмотрим алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух многочленов $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Первый шаг: разделим многочлен $f(x)$ на $g(x)$ с остатком.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 & x^3 + x^2 - x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + x^3 - x^2 - x \phantom{{}-1}} & x \\
-2x^2 - 3x - 1 &
\end{array}$$

Остаток $r_1(x) = -2x^2 - 3x - 1$.

Второй шаг: поделим с остатком $g(x)$ на $r_1(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + x^2 - x - 1 & -2x^2 - 3x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \phantom{{}-1}} & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\
-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 & \\
\underline{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}} & \\
-\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} &
\end{array}$$

Остаток $r_2(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$.

Третий шаг: поделим с остатком $r_1(x)$ на $r_2(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^2-3x-1 & -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^2-2x\phantom{-1}} & \frac{8}{3}x+\frac{4}{3} \\
-x-1 & \\
\underline{-x-1} & \\
0 &
\end{array}
$$

Остаток $r_3(x) = 0$.

По алгоритму Евклида НОД$(f(x), g(x))$ равен последнему ненулевому остатку. В нашем случае НОД$(f(x), g(x)) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$. Заметим, что так как НОД определен с точностью до умножения на ненулевую константу, то ответ к данной задаче можно записать так НОД$(f(x), g(x)) = x + 1$.

*Корнем* многочлена $f(x) \in K[x]$ называется такой элемент $\alpha \in K$, что $f(\alpha) = 0$. *Кратностью* корня $\alpha$ многочлена $f(x) \in K[x]$ называется такое целое неотрицательное число $k$, что $(x-\alpha)^k$ делит многочлен $f(x)$, $(x-\alpha)^{k+1}$ не делит $f(x)$ (см. гл. 6 §1 [3]). Кратность корня легко увидеть, если многочлен разложен на линейные сомножители. Например, для многочлена $f(x) = (x-1)^2(x-5)^4(x-3)^7$ кратность корня $x_1 = 1$ равна 2, $x_2 = 5$ равна 4, $x_3 = 3$ равна 7.

# 7 Линейная зависимость векторов. Линейная оболочка

Пусть $V$ — векторное пространство над полем $P$ (см. гл. 1 §1 [4]). Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пространства $V$ называются *линейно независимыми*, если уравнение

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$$

имеет единственное нулевое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, где для любого $i$ элементы $\alpha_i \in P$. В противном случае, система векторов называется линейно зависимой. Свойства линейно зависимой системы векторов можно посмотреть в гл. 1 §2.1 [4].

Как правило, мы будем рассматривать в качестве векторного пространства $V$ пространство $\mathbb{R}^n$ строк (столбцов) длины $n$ с вещественными коэффициентами.

**Пример.** Являются ли векторы $a_1 = (1, 0, -1, 1)$, $a_2 = (2, 2, -1, -1)$, $a_3 = (0, 2, 1, -3)$, $a_4 = (1, 1, -1, 4)$ линейно зависимыми?

**Решение.**

Решим уравнение $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0$ относительно переменных $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$. Подставим вместо $a_i$ его координаты.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Решим методом Гаусса эту систему линейных однородных уравнений.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)+3(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-3(3)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Переменные $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_4$ — главные, $\alpha_3$ — свободная. Выполним обратный ход Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right). \text{ Общее решение имеет вид } \begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}.$$

Найдем ненулевое частное решение, придав свободной переменной $\alpha_3$ какое-либо ненулевое решение, например 1.

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Таким образом, справедливо равенство $2a_1 - a_2 + a_3 + 0a_4 = 0$. Следовательно, векторы $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ являются линейно зависимыми.

*Линейной оболочкой* системы векторов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ из векторного пространства $V$ над полем $P$ называется множество линейных комбинаций данных векторов над полем $P$. Обозначение: $< A >$ или $Lin(A)$. Таким образом,

$$Lin(A) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n;\ \forall i\ \alpha_i \in P\}.$$

Линейная оболочка векторов пространства $V$ образует подпространство в $V$, то есть само является векторным пространством относительно операций, определенных в $V$.

*Базисом* векторного пространства $V$ называется такая линейно независимая система $E = \{e_1,\ e_2, \ldots$ векторов пространства $V$, что любой вектор $v \in V$ есть линейная комбинация векторов из $E$, то есть $\exists \alpha_1$, $\alpha_2, \dots \in P\ v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots$.

Число векторов в базисе векторного пространства $V$ называется его *размерностью* и обозначается через $\dim V$. В дальнейшим мы будем рассматривать только конечномерные векторные пространства. Материал по данной теме можно посмотреть в гл. 1 §2.2 [4].

**Пример.** Найти базис и размерность линейной оболочки $A$ системы векторов $\{a_1 = (1, 0, -1, 1),\ a_2 = (2, 2, -1, -1),\ a_3 = (0, 2, 1, -3),\ a_4 = (1, 1, -1, 4)\}$.

**Решение.**

Так как система $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ порождает линейную оболочку $A$, то максимальная линейно независимая подсистема нашей системы векторов образует базис в $A$.

Возьмем произвольный вектор нашей системы, например $a_1$, и проверим линейную независимость системы, состоящей из этого вектора. Так как один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он не нулевой, и $a_1 \neq 0$, то система $\{a_1\}$ является линейно независимой. Вектор $a_1$ включаем в базис.

Берем следующий вектор, например $a_2$, и добавляем его к включенным в базис векторам. Проверяем линейную независимость новой системы $\{a_1,\ a_2\}$. По свойствам линейно независимой системы, два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда их координаты не пропорциональны. Так как $\{a_1 = (1, 0, -1, 1)$ и $a_2 = (2, 2, -1, -1)$ имеют непропорциональные координаты, то система $\{a_1,\ a_2\}$ является линейно независимой. Вектор $a_2$ включаем в базис.

Далее рассмотрим систему $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ и проверим ее линейную независимость. Выпишем уравнение $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$ и найдем все его решения.

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{(4)-(1)}{\overset{(3)+(1)}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{(4)+3(2)}{\overset{(3)-2(2)}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Переменные $\alpha_1$, $\alpha_2$ являются главными, $\alpha_3$ — свободная. Общее решение имеет вид $\begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$

Придав переменной $\alpha_3$ значение 1, получим ненулевое решение.

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2, \\ \alpha_2 = -1, \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, векторы $a_1$, $a_2$, $a_3$ являются линейно зависимыми. Вектор $a_3$ не включаем в базис.

Последний шаг, проверим линейную независимость системы $\{a_1,\ a_2,\ a_4\}$. Выпишем уравнение $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_4 a_4 = 0$ и найдем все его решения. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{(4)-(1)}{\overset{(3)+(1)}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(4)+3(2)]{(3)-2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-3(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)-(3)]{(1)-2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Все переменные $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_4$ — главные. Система имеет единственное нулевое решение. Векторы $a_1$, $a_2$, $a_4$ являются линейно независимыми. Вектор $a_4$ включаем в базис.

Таким образом, $\{a_1, a_2, a_4\}$ — базис линейной оболочки $A$. Так как базис состоит из трех векторов, то $\dim A = 3$.

# 8 Координаты. Матрица перехода

*Координатами* вектора $v \in V$ в базисе $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ называются коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в линейном разложении $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ по базису $E$. Смотри гл. 1 §2.3 [4].

Пусть в векторном пространстве $V$ заданы два базиса $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Матрица $T = \{t_{ij}\}$ размера $n \times n$ *называется матрицей* перехода от $E$ к $F$, если в $j$-том столбце стоят координаты вектора $f_j$ в базисе $E$, то есть $f_j = t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \dots + t_{nj}e_n$.

Координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ вектора $v \in V$ в базисах $E$ и $F$, соответственно, связаны следующей формулой.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T_{E\to F} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

где $T_{E\to F}$ — матрица перехода от $E$ к $F$.

**Пример.** Доказать, что каждая из систем векторов $E = \{(-1, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}$ и $F = \{(-1, 0 -1), (-1, -1, 0), (1, 1 -1)\}$ являются базисом в $\mathbb{R}^3$. Найти матрицу перехода от $E$ к $F$ и координаты вектора $x = (1, 2, 3)$ в базисах $E$ и $F$.

**Решение.**

Чтобы доказать, что система $E$ образует базис в $\mathbb{R}^3$, воспользуемся следующим утверждением. В $n$-мерном векторном пространстве любая линейно независимая система из $n$ векторов образует базис. Так как $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, то достаточно проверить линейную независимость векторов системы $E$. В данном случае проверка выполняется просто. Заметим, что система $E$ является линейно независимой тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из векторов, отличен от нуля.

Данный способ проверки работает лишь в том случае, когда матрица, составленная из векторов, является квадратной.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{(1)+(3)}{\overset{(2)+2(1)}{=}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{(2)-(3)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{(3)-4(2)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Аналогично проверим линейную независимость системы $F$.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Для нахождения матрицы перехода от $E$ к $F$ выпишем в столбец векторы базиса $E$, затем базиса $F$. Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу к виду, где слева (на месте векторов базиса $E$) стоит единичная матрица. Тогда справа (на месте векторов базиса $F$) получим нужную матрицу перехода.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{(1)+(3)}{\overset{(2)+2(1)}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{(2)-(3)}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{(3)-4(2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 7 & -12 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{(1)+(3)}{\longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -3 & 6 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 7 & -12 \end{array}\right) \overset{(1)-2(2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 7 & -12 \end{array}\right) \underset{(2)*(-1)}{\overset{(1)*(-1)}{\longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 12 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad T_{E\to F} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 \\ -2 & 5 & -9 \\ 2 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

Найдем координаты вектора $x$ в базисе $F$. Напомним, что числа $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ являются координатами вектора $x$ тогда и только тогда, когда $x = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3$. Имеем равенство

$$\beta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Методом Гаусса решим полученную систему линейных уравнений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2)+(3)]{(1)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Координаты вектора $x$ в базисе $F$ равны $(1, -6, -4)$. Используя матрицу перехода, легко найти координаты вектора $x$ в базисе $E$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = T_{E\to F} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -7 \\ -2 & 5 & -9 \\ 2 & -7 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Координаты вектора $x$ в базисе $E$ равны $(3, 4, -4)$.

# 9 Линейные преобразования

Отображение $\varphi : V \to V$ из векторного пространства $V$ в $V$ называется *линейным преобразованием*, если выполнено два свойства:
1) $\forall x, y \in V\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
2) $\forall x \in V\ \forall \alpha \in P\ \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

Для примера рассмотрим два преобразования, определенные для любого векторного пространства $V$. *Нулевое* преобразование $o$, задаваемое правилом $\forall x \in V\ o(x) = 0$, и *тождественное* преобразование $\varepsilon$, определенное правилом $\forall x \in V\ \varepsilon(x) = x$.

Заметим, что линейное преобразование обнозначно задается указанием образов базисных векторов. На этом свойстве основан метод задания линейного преобразования при помощи матрицы.

Пусть в векторном пространстве $V$ задан базис $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. *Матрицей линейного преобразования* $\varphi : V \to V$ называется матрица $[\varphi] = \{a_{ij}\}$, в $j$-том столбце которой стоят координаты образа $\varphi(e_j)$ в базисе $E$. То есть $\varphi(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n$.

Нулевое преобразование, определенное выше, имеет нулевую матрицу в любом базисе. Тождественное преобразование имеет единичную матрицу в любом базисе. Несмотря на приведенные примеры, матрица линейного преобразования все таки зависит от базиса и изменяется при переходе в другой базис по правилу

$$[\varphi]_F = T^{-1}_{E\to F}\,[\varphi]_E\,T_{E\to F}.$$

Доказательство этого свойства и другие свойства линейного преобразования и его матрицы смотри в гл. 2 §1–2 [4].

**Пример.** Найти матрицу линейног преобразования $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$. Преобразование $\varphi$ задано правилом: $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + x_3, -x_2 + x_3)$.

**Решение.**
Найдем образы базисных векторов.
$\varphi(e_1) = (1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0, 1 + 0, -0 + 0) = (1, 1, 0)$;
$\varphi(e_2) = (1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, 1 + 1, -1 + 0) = (3, 2, -1)$;
$\varphi(e_3) = (1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1, 1 + 1, -1 + 1) = (6, 2, 0)$.

Координаты образов базисных векторов в базисе $E$ будем находить одновременно. Для этого выпишем в столбец по порядку базисные векторы $e_1$, $e_2$, $e_3$, затем полученные векторы $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)-(3)]{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Матрица линейного преобразования $\varphi$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

# 10 Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования

Пусть $\varphi : V \to V$ — линейное преобразование векторного пространства $V$ над полем $P$. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* линейного преобразования $\varphi$, если существует такой скаляр $\lambda \in P$, что выполняется равенство $\varphi(v) = \lambda \cdot v$. Скаляр $\lambda$ называется *собственным значением* линейного преобразования $\varphi$, соответствующим вектору $v$. Смотри гл. 2 §3.3 [4].

Для нахождения собственных значений используют следующий многочлен. Пусть линейное преобразование $\varphi$ имеет матрицу $[\varphi]$ в некотором базисе векторного пространства $V$. *Характеристическим многочленом* преобразования $\varphi$ называется многочлен $\chi_\varphi(\lambda)$ равный $\det([\varphi] - \lambda E)$. Заметим, что $\chi_\varphi(\lambda)$ — многочлен над полем $P$ степени $\dim V$.

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса. Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Множество собственных значений линейного преобразования $\varphi$ совпадает с множеством корней характеристического многочлена $\chi_\varphi(\lambda)$ над полем $P$.

**Пример.** Найти собственные векторы и собственные значения линейного преобразования $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

Составим характеристический многочлен и найдем все его корни, принадлежащие полю $\mathbb{R}$.

$$\chi_\varphi(\lambda) = \det([\varphi] - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix}.$$

Вычислить данный определитель можно разными способами. Мы воспользуемся формулой, справедливой для матриц размера $3 \times 3$.

$$\det(A_{3\times3} - \lambda E_{3\times3}) = -\lambda^3 + Tr(A)\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det A,$$

где $Tr(A)$ — след матрицы $A$, равный сумме диагональных элементов, $A_{ij}$ — алгебраическое дополнение к элементу $ij$ матрицы $A$. Вы можете в качестве упражнения самостоятельно доказать и обобщить данную формулу для матриц произвольного размера.

В нашем случае.

$$Tr([\varphi]) = 4 + (-7) + 4 = 1.$$

$$[\varphi]_{11}+[\varphi]_{22}+[\varphi]_{33} = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -1+4+(-3) = 0.$$

$$\det[\varphi] = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, $\chi_\varphi(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2$.

Решая уравнение $-\lambda^3 + \lambda^2 = 0$, найдем корни характеристического многочлена.

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 0.$$

Для каждого собственного значения $\lambda$ найдем собственные векторы, решая уравнение $([\varphi] - \lambda E)x = 0$.

Для $\lambda_1 = 1$ уравнение примет вид:

$$\begin{pmatrix} 4-1 & -5 & 2 \\ 5 & -7-1 & 3 \\ 6 & -9 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Данное уравнение представляет собой систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $x_1$, $x_2$, $x_3$. Так как матрица коэффициентов при неизвестных имеет нулевой определитель, то данная система всегда имеет бесконечно много решений. Наша задача найти базис пространства решений, то есть фундаментальную систему решений. Решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(1)\cdot(-1)]{(2)+3(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Переменные $x_1$, $x_2$ — главные, $x_3$ — свободная. Общее решение

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Число свободных переменных равно размерности пространства решений. В данном случае одному. Таким образом, число линейно независимых собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_1$ равно одному. Для того, чтобы найти этот вектор, достаточно свободной переменной придать какое-либо ненулевое решение, например 1. Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Любой другой собственный вектор получается из найденного вектора $(1,\,1,\,1)$ домножением на константу.

Для $\lambda_{2,3} = 0$ имеем уравнение:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{(2)-(1)}{\overset{(3)-(2)}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{(3)-(2)}{\overset{(1)-4(2)}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3(1)+2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Переменные $x_1$, $x_2$ — главные, $x_3$ — свободная. Общее решение

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 \end{cases}.$$

Переменной $x_3$ придадим ненулевое решение равное 3. Получим собственный вектор $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Любой другой собственный вектор получается из найденного вектора (1, 2, 3) домножением на константу.

Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует собственные векторы $C_1(1,\, 1,\, 1)$, собственному значению $\lambda_{2,\,3}$ — $C_2(1,\, 2,\, 3)$.

# Задания для контрольной работы № 2

**Задание № 1.**

Проверить, являются ли векторы линейно зависимыми.

(1.) $\{a_1 = (1, -1, -2, 1),\ a_2 = (2, 2, -1, -1),\ a_3 = (1, -1, -1, 1),$ $a_4 = (1, -5, -3, 4),\ a_5 = (-1, -2, 1, 1)\}$.

(2.) $\{a_1 = (0, -1, -2, 1),\ a_2 = (2, 1, 2, -1),\ a_3 = (1, -1, -1, 1),$ $a_4 = (0, -4, -6, 4),\ a_5 = (1, -2, -1, 1)\}$.

(3.) $\{a_1 = (-1, 0, -1, 2),\ a_2 = (-1, 3, 2, -1),\ a_3 = (1, -3, -1, 2),$ $a_4 = (2, -9, -5, 7),\ a_5 = (1, -2, 1, 1)\}$.

(4.) $\{a_1 = (1, 0, -1, 2),\ a_2 = (4, -6, -4, 1),\ a_3 = (2, 1, 6, 2),$ $a_4 = (1, 8, 15, 5),\ a_5 = (1, -1, 1, 0)\}$.

(5.) $\{a_1 = (1, 1, -1, 2),\ a_2 = (3, -6, -2, 1),\ a_3 = (3, 2, 8, 2),$ $a_4 = (4, 11, 17, 5),\ a_5 = (1, -1, 2, 0)\}$.

(6.) $\{a_1 = (1, 3, -1, 0),\ a_2 = (-3, 1, -2, 1),\ a_3 = (3, 2, -1, 2),$ $a_4 = (10, 6, -1, 3),\ a_5 = (-1, -2, 1, -1)\}$.

(7.) $\{a_1 = (1, 3, -1, 0),\ a_2 = (2, 8, -2, 1),\ a_3 = (2, 2, -1, 2),$ $a_4 = (3, -1, -1, 3),\ a_5 = (-1, -2, 1, -1)\}$.

(8.) $\{a_1 = (1, 3, -1, 1),\ a_2 = (10, 8, -2, 1),\ a_3 = (0, 4, -1, 12),$ $a_4 = (-9, 3, -1, 24),\ a_5 = (1, -3, 1, -6)\}$.

(9.) $\{a_1 = (1, 3, -2, 1),\ a_2 = (3, 1, 0, 1),\ a_3 = (9, 4, -1, 4),$ $a_4 = (16, 10, -4, 8),\ a_5 = (1, 0, 1, 0)\}$.

(0.) $\{a_1 = (1, 2, -2, 1),\ a_2 = (3, 1, 0, 1),\ a_3 = (6, 2, -1, 2),$ $a_4 = (10, 5, -4, 4),\ a_5 = (1, 1, 1, 1)\}$.

**Задание № 2.**

Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов из задачи № 1.

**Задание № 3.**

Доказать, что каждая из систем векторов $E$ и $F$ являются базисом в $\mathbb{R}^3$, найти матрицу перехода от $E$ к $F$ и координаты вектора $x$ в базисах $E$ и $F$.

(1.) $E = \{(2, 1, 2), (3, -1, 4), (2, 4, 1)\}$, $F = \{(-1, 0, 1), (2, 1, 0), (1, 2, -1)\}$, $x = (8, -4, 4)$.

(2.) $E = \{(3, 1, 2), (3, 1, 3), (2, 1, 0)\}$, $F = \{(-1, 0, 1), (2, 1, 0), (1, 2, -1)\}$, $x = (8, -4, 4)$.

(3.) $E = \{(3, 5, 4), (2, 2, 3), (1, 2, 1)\}$, $F = \{(-1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, -1)\}$, $x = (2, -4, 4)$.

(4.) $E = \{(2, 1, 4), (2, 2, 3), (1, 2, 1)\}$, $F = \{(-1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, -1)\}$, $x = (1, 1, 2)$.

(5.) $E=\{(1,3,4),(2,3,3),(1,2,2)\}$, $F=\{(-1,0,1),(1,1,0),(1,1,-1)\}$, $x=(1,-1,-2)$.

(6.) $E=\{(2,2,1),(1,2,3),(3,1,-4)\}$, $F=\{(-1,0,1),(1,1,0),(1,1,-1)\}$, $x=(1,0,-2)$.

(7.) $E=\{(2,1,-5),\ (2,-2,3),\ (-1,2,-4)\}$, $F=\{(-1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,-1)\}$, $x=(2,1,-2)$.

(8.) $E=\{(-1,3,-2),\ (-1,1,-1),\ (3,2,1)\}$, $F=\{(-1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,-1)\}$, $x=(3,-1,3)$.

(9.) $E=\{(-1,3,-2),\ (-1,2,-1),\ (2,-2,2)\}$, $F=\{(-1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,-1)\}$, $x=(2,-4,4)$.

(0.) $E=\{(1,2,2),\ (-1,3,-1),\ (2,-2,3)\}$, $F=\{(-1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,-1)\}$, $x=(1,2,1)$.

**Задание № 4.**

Выяснить, является ли преобразование $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ линейным, найти его матрицу в базисе $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(1,1,0)$, $e_3=(1,1,1)$ пространства $\mathbb{R}^3$. Преобразование $\varphi$ задано правилом:

(1.) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(-x_1+x_2-3x_3,x_1-x_2+3x_3,-x_2+2x_3)$.

(2.) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-3x_3,x_1-x_2+3x_3,-x_2+2x_3)$.

(3.) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(2x_2-4x_3,x_1+x_2-x_3,x_2-2x_3)$.

(4.) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(2x_2-4x_3,x_1+x_2-x_3,-x_1+x_2-3x_3)$.

(5.) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-3x_3,-x_1+x_2-3x_3,x_1+x_2-3x_3)$.

(6.) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(-x_1+2x_2-5x_3,x_1+5x_2-9x_3,2x_2-4x_3)$.

(7.) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(-x_1+x_2-3x_3,2x_1-4x_2+10x_3,2x_2-4x_3)$.

(8.) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2,x_1-4x_2+9x_3,2x_2-4x_3)$.

(9.) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2,2x_1-4x_2+10x_3,3x_2-6x_3)$.

(0.) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-3x_3,2x_1-x_2,-2x_1+x_2-4x_3)$.

**Задание № 5.**

Найти собственные векторы и собственные значения линейного преобразования, заданного матрицей.

(1.) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2.) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (3.) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4.) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5.) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (6.) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (7.) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(8.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (9.) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (0.) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

# Список литературы


[1] Воеводин, В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1980. — 400 с.

[2] Линейная зависимость: методическое указание для практических занятий по курсу «Алгебра и теория чисел»/ Р. Ж. Алеев, О. В. Горбачева, В. В. Кораблева. — Челябинск : Челябинский государственный университет, 1989.

[3] Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: учебник для вузов / А. И. Кострикин. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[4] Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: учебник для вузов / А. И. Кострикин. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[5] Кострикин, А. И. Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. — М. : Наука, 1986.

[6] Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М.: Наука, 1971.

[7] Сборник задач по алгебре / Под. ред. А. И. Кострикина: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, испр. и доп. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 464 с.

[8] Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под. ред. Ю.М. Смирнова. — М. : Логос, 2005.

[9] Первова, Е. Л. Лекции по линейной алгебре для экономистов: перестановки и матрицы / Е. Л. Первова. — www.csu.ac.ru/lectures/LinAlgEcon.pdf.

[10] Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — М. : Наука, 1974.