федеральное агентство по образованию российской федерации
ГОУ ВПО «ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра компьютерной топологии и алгебры

Е.А. Сбродова

АЛГЕБРА

методические указания
для студентов-заочников математического факультета
ГОУ ВПО «ЧелГУ»

Челябинск 2009

Введение

Настоящие методические указания помогут студентам-заочникам в изучении дисциплины «Алгебра»и, в частности, в овладении навыками решения задач. При изучении любого раздела математики важны как теоретическая часть, так и практическая. Решение задач является необходимым условием для глубокого понимания и усвоения материала. Данные методические указания содержат контрольные задания, которые студент должен выполнить.

Методические рекомендации содержат краткие теоретические сведения и примеры решения задач, которые помогут при выполнении контрольных работ. Следует отметить, что этих сведений недостаточно. Список рекомендуемой литературы приведен в конце.

При выполнении контрольной работы и представлении ее на проверку студент должен руководствоваться следующими правилами.

1. Номер варианта контрольной работы равен последней цифре номера зачетной книжки.

2. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради и сдана на кафедру компьютерной топологии и алгебры на проверку не позднее чем за две недели до начала сессии.

3. На титульном листе должно быть указано: контрольная работа по алгебре, номер варианта, фамилия имя отчество студента, группа, фамилия преподавателя.

4. Для получения зачета по контрольной работе студент должен пройти собеседование с преподавателем, в ходе которого необходимо продемонстрировать понимание хода решения задач в своей работе.

5. Если при проверке контрольной работы обнаружены ошибки, то студент должен в той же тетради выполнить работу над ошибками и сдать ее для проверки.

6. Решение задач из контрольной работы должно быть достаточно подробным и логически последовательным.

1 Действия с матрицами

Матрица — это прямоугольная таблица чисел (элементов множества). Размером матрицы называется число ее строк и число столбцов.

$$A_{k\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Обращение к элементу матрицы происходит указанием номера строки и номера столбца. Например, элемент a_{27} (читается: а два семь) стоит во второй строке и седьмом столбце. Две матрицы называются равными, если они имеют равные размеры и их элементы, стоящие на соответствующих местах, равны.

Всякую матрицу можно *умножить на число*, для этого нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

Суммой двух матриц $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ одинакового размера $k\times n$ называется матрица $C_{k\times n} = \{c_{ij}\}$, такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Если число столбцов матрицы $A_{k\times n}$ равно числу строк матрицы $B_{s\times t}$ (то есть $n = s$), то определено *умножение* $A \cdot B$. Результат умножения $A \cdot B$ есть матрица $C = \{c_{ij}\}$ размера $k \times t$, для которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Одна из особенностей операции умножения состоит в том, что произведение матриц в общем случае некоммутативно, то есть $AB \neq BA$. Приведите пример таких матриц A и B, что $AB \neq BA$. Матрица

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

играет роль единицы по умножению в матрицах, то есть для любой матрицы $A_{k\times s}$, $A \cdot E_{s\times s} = E_{k\times k} \cdot A = A$. Матрица E называется *единичной матрицей.*

Операция *транспонирование* применима к любой матрице $A_{k\times n}$. Она заключается в том, что столбцы матрицы A становятся строками и наоборот, строки — столбцами. Обозначается операция транспонирования верхним индексом ^{t}, например A^t. Нетрудно заметить, что на месте ij матрицы A^t стоит элемент a_{ji} матрицы A.

Пример. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ вычислить выражение $AB^t - C^2$.

Решение.

1) $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $AB^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 & 2\cdot(-2) + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 1\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3) $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $AB^t - C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.

2 Определитель

Существует несколько способов построения теории определителей ([3], §4, гл. 1; гл. 3; [9]). Вы можете выбрать любой подход. Приведем индуктивное определение.

Определителем квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называется число $\det A$, равное

при $n = 1$, $\det(a_{11}) = a_{11}$;

при $n = 2$, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

предположим, что мы умеем вычислять определитель при $n = k$, тогда при $n = k+1$, $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1(k+1)}A_{1(k+1)}$, где $A_{1j} = (-1)^{1+j}\det$(матрицы, полученной из A вычеркиванием первой строки и j-го столбца).

Определитель матрицы будем обозначать либо $\det A$, либо $|A|$.

Вычисление определителя по определению вызывает ряд затруднений, связанных, в основном, с большим числом слагаемых в определении.

Используя свойства определителя (смотри §3, гл. 3 [3]), можно вычислить его, не прибегая к определению. Одним из таких способов вычисления является приведение определителя к треугольному виду.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Наша задача привести матрицу к треугольному виду, то есть получить нули ниже (или выше) главной диагонали при помощи элементарных преобразований строк. Работая первой строкой, получим нули в первом столбце ниже главной диагонали. Вычтем из второй строки первую, из третьей — удвоенную первую, из четвертой — утроенную первую. Получим определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Поменяем вторую и третью строки местами, тем самым во второй строке и втором столбце получим единицу. Работать единицей гораздо удобнее нежели другим числом, так как не возникает дробей. В общем случае, получать единицу не обязательно. Заметим, что это преобразование изменит знак определителя на противоположный.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Работая второй строкой, получим нули во втором столбце ниже главной диагонали. Из третьей строки вычтем утроенную вторую, к четвертой строке прибавим вторую.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Покажем, как, не получая единицы в третьей строке, третьем столбце, получить нули в третьем столбце ниже главной диагонали. К четвертой строке прибавим третью, умноженную на $\frac{6}{4}$.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что определитель треугольной матрицы равен произведению элементов матрицы, стоящих на главной диагонали. В нашем случае $-(1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot \frac{-7}{2}) = -14$.

3 Обратная матрица

Матрица A называется *обратимой*, если существует такая матрица B, что $AB = BA = E$. Матрица B называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}.

Критерий обратимости. Матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Более того, обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^t,$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение.

Предложенная формула удобна для вычисления лишь для матриц малых размеров. Например, чтобы найти обратную матрицу для матрицы размера 4×4, нужно вычислить 16 определителей порядка 3; 5×5 — 25 определителей порядка 4; и т.д.

Альтернативный способ нахождения обратной матрицы — метод Жордана-Гаусса. Справа, через вертикальную черту, от данной матрицы A припишем единичную матрицу такого же размера. Действуя всей матрицей целиком, элементарными преобразованиями строк получим на месте матрицы A единичную матрицу. Тогда приписанная справа единичная матрица преобразуется в матрицу A^{-1}.

$$(A|E) \longrightarrow (E|A^{-1})$$

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Припишем к матрице A единичную матрицу.

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Из второй строки вычтем первую, из третий — учетверенную первую, из четвертой — утроенную первую. Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Удвоим вторую строку и вычтем из нее четвертую.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 25 & 3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Из третьей строки вычтем двадцать пять вторых строк, из четвертой — семнадцать вторых строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -29 & -50 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -20 & -34 & 0 & 18 \end{array}\right).$$

Из третьей строки вычтем четвертую.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -16 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -20 & -34 & 0 & 18 \end{array}\right).$$

К четвертой строке прибавим четыре третьих строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -16 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -56 & -98 & 4 & 46 \end{array}\right).$$

Третью строку поделим на -1, четвертую — на -2.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right).$$

Из первой строки вычтем четвертую.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 0 & -27 & -49 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right).$$

К первой строке прибавим третью.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & 0 & 0 & -18 & -33 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right).$$

К первой строке прибавим шесть вторых строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -12 & -21 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right).$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -12 & -21 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 9 & 16 & -1 & -7 \\ 28 & 49 & -2 & -23 \end{pmatrix}.$

4 Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Матрицей коэффициентов при неизвестных называется матрица

$$A_{k\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ называется *столбцом свободных членов.*

Используя введенные обозначения систему линейных уравнений можно записать в матричном виде $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$.

Решением системы называется такой упорядоченный набор $c_1, c_2, \ldots,$ c_n чисел, что при подстановке c_i вместо x_i каждое уравнение системы обращается в тождество.

Решение системы при помощи обратной матрицы. Пусть матрица A коэффициентов при неизвестных является квадратной обратимой матрицей. Тогда система линейных уравнений имеет единственное решение и его можно найти следующим образом: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Еще одним способом решения систем линейных уравнений является правило Крамера (смотри [3] §3, гл. 3). Пусть матрица A коэффициентов при неизвестных является квадратной и $\det A \neq 0$. Тогда система линейных уравнений имеет единственное решение и его можно найти следующим образом: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots,$ $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где $\Delta = \det A$, $\Delta_i = \det($матрицы, полученной из A заменой i-го столбца, столбцом свободных членов$)$.

Универсальным способом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Материал по данному разделу можно найти в [3], §3, гл. 1; [6], §1, 2.

Пример. Найти методом Гаусса общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

Решение.

Расширенная матрица нашей системы имеет вид

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right).$$

Элементарными преобразованиями строк приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)+3(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+9(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

Переменные x_1 и x_2, отвечающие вершинам ступенек, являются главными, остальные переменные x_3 и x_4 — свободными. Выразим главные переменные через свободные. Для этого в расширенной матрице получим нули над главной диагональю.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\div 11} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\div(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right)$$

Перейдем к уравнениям и выпишем ответ.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = -\frac{2}{11} \\ x_2 + \frac{5}{11}x_3 - \frac{1}{11}x_4 = \frac{10}{11} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{array} \right.$

5 Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, элемент i удовлетворяет условию $i^2 = -1$. Заметим, что элемент i является корнем уравнения $x^2 + 1 = 0$, не разрешимого над множеством вещественных чисел, и, следовательно, не принадлежит $\mathbb{R}$. i называется *мнимой единицей.*

На множестве комплексных чисел введены две операции сложение и умножение. Пусть даны два комплексных числа $z = a + bi$, $w = c + di$.

Тогда
- $z + w = (a + c) + (b + d)i$;
- $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Относительно введенных операций множество комплексных числе образует поле (смотри [3] §1, гл. 5), которое мы будем обозначать через $\mathbb{C}$.

Пусть дано комплексное число $z = a + bi$. Комплексно сопряженным к числу z называется число $a - bi$ и обозначается через $\overline{z}$. Для того, чтобы вычислить выражение $\frac{w}{z}$ с комплексными числами w и z, нужно и числитель, и знаменатель умножить на комплексно сопряженное к знаменателю, В данном случае на $\overline{z}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Любое комплексное число $z = a + bi$ можно представить в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, при чем единственным образом. Такая запись называется *тригонометрической формой* комплексного числа z. Правила, по которым вычисляются r и φ довольно просты, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ находится из двух условий $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$. Число r называется *модулем* комплексного числа z и обозначается через $|z|$. Число φ называется *аргументом* числа z и обозначается через $\arg z$. Тригономерическая форма удобна при перемножении и возведении в степень комплексного числа.

Формула Муавра. Пусть дано комплексное число $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда для любого целого числа n справедлива формула

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Извлечение корней. Пусть дано комплексное число $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда для любого натурального числа n все корни $\sqrt[n]{z}$ принадлежат множеству

$$\left\{|z|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Пример. Вычислить выражение $\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{120}$.

Решение.

Заметим, что $\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{120} = \frac{(2+2i)^{120}}{(\sqrt{3}+i)^{120}}$.

Вычислим по формуле Муавра выражения $(2 + 2i)^{120}$ и $(\sqrt{3} + i)^{120}$. Для этого найдем тригонометрические формы каждого из оснований.

$2 + 2i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Таким образом $2+2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Тогда по формуле Муавра $(2+2i)^{120} = (2\sqrt{2})^{120}(\cos\frac{120\pi}{4} + i\sin\frac{120\pi}{4}) = 2^{180}(\cos 30\pi + i\sin 30\pi) = 2^{180}$.

Аналогично $(\sqrt{3}+i)^{120} = (2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{120} = 2^{120}(\cos\frac{120\pi}{6}+i\sin\frac{120\pi}{6}) = 2^{120}(\cos 20\pi + i\sin 20\pi) = 2^{120}$.

Таким образом $\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{120} = \frac{2^{180}}{2^{120}} = 2^{60}$.

Ответ: 2^{60}.

Пример. Записать в алгебраической форме элементы множества $\sqrt[4]{2i}$.

Решение.

Для того, чтобы воспользоваться формулой для нахождения корней из комплексного числа, нужно подкоренное выражение записать в тригонометрической форме.

$$2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

Тогда

$$\sqrt[4]{2i} = \left\{2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}), k = 0,1,2,3\right\}$$

При $k=0$, $u_0 = 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) = 2^{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.
При $k=1$, $u_1 = 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}) = 2^{\frac{1}{4}}(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.
При $k=2$, $u_2 = 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}) = 2^{\frac{1}{4}}(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.
При $k=3$, $u_3 = 2^{\frac{1}{4}}(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}) = 2^{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.

Ответ: $2^{\frac{1}{4}}(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$.

1. Для матриц A, B, C, D

№	A	B	C	D
1	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

вычислить (1) $AB - 2E$ (E — единичная матрица подходящего размера); (2) $BA - C^2$; (3) $\det C$; (4) $\det D$; (5) D^{-1} двумя способами (при помощи присоединенной матрицы и элементарных преобразований).

2. Вычислить определитель:

$$(1.)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix};\ (2.)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix};\ (3.)\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix};\ (4.)\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix};$$

$$(5.)\begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{vmatrix};\ (6.)\begin{vmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{vmatrix};\ (7.)\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(8.)\begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix};\ (9.)\begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};\ (0.)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Найти решение системы линейных уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы.

$$(1.)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}\quad (2.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(3.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}\quad (4.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(5.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}\quad (6.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 7x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(7.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}\quad (8.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(9.)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 + 10x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}\quad (0.)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

4. Найти общее решение системы линейных уравнений.

(1.) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=2 \\ -2x_1+3x_2+3x_3-x_4=3 \\ -x_1+3x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$ (2.) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=2 \\ -2x_1+4x_2+x_3-x_4=3 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$

(3.) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=2 \\ -2x_1+5x_2+x_3-x_4=3 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$ (4.) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=2 \\ -2x_1+6x_2+x_3-x_4=3 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$

(5.) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=2 \\ -2x_1+7x_2+x_3-x_4=3 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$ (6.) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=2 \\ -2x_1+8x_2+x_3-x_4=3 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$

(7.) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=2 \\ -2x_1+9x_2+x_3-x_4=3 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$ (8.) $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=2 \\ -2x_1+10x_2+x_3-x_4=3 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$

(9.) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$ (0.) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=3 \\ -x_1-2x_2+x_3+2x_4=1 \end{cases}$

5. Вычислить выражение:

(1.) $(1-i)+\frac{-1+2i}{2+i}$; (2.) $(3-i)+\frac{-2+2i}{1+i}$; (3.) $(3-i)+\frac{-1+3i}{2-i}$;

(4.) $(2+i)+\frac{2+3i}{3-2i}$; (5.) $(1+2i)+\frac{-1-3i}{2+i}$; (6.) $(-1+2i)+\frac{3-i}{1+i}$;

(7.) $(1-2i)+\frac{-1+3i}{-2+i}$; (8.) $(1+3i)+\frac{-3+5i}{1+i}$; (9.) $(3-5i)+\frac{2-6i}{-2+i}$;

(0.) $(-2+i)+\frac{-3+5i}{-1+i}$.

6. Вычислить выражения:

(1.) $\left(\frac{2-2i}{\sqrt{3}-i}\right)^{120}$; (2.) $\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{60}$; (3.) $\left(\frac{1+i}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{48}$; (4.) $\left(\frac{-1+i}{\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{120}$;

(5.) $\left(\frac{-1+i}{\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{60}$; (6.) $\left(\frac{-2-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{120}$; (7.) $\left(\frac{-1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{60}$; (8.) $\left(\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-i}\right)^{66}$;

(9.) $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{60}$; (0.) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{120}$.

7. Записать в алгебраической форме элементы множества:

(1.) $\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}}$; (2.) $\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{3}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}}}$; (3.) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}}$;

(4.) $\sqrt[6]{\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}+1-i}$; (5.) $\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}-1-i}$; (6.) $\sqrt[6]{\frac{1+i}{1-i}-1-i}$;

(7.) $\sqrt[4]{\frac{1-i}{1+i}+1+i}$; (8.) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$; (9.) $\sqrt[6]{\frac{1+i}{i}+i}$;

(0.) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{i}-1}$.

8. Решить уравнение над полем комплексных чисел:

(1.) $x^2+3x+3=0$; (2.) $x^2+2x+3=0$; (3.) $x^2+x+2=0$;

(4.) $x^2+x+4=0$; (5.) $x^2+2x+2=0$; (6.) $x^2-x+5=0$;

(7.) $x^2-2x+3=0$; (8.) $x^2-2x+2=0$; (9.) $x^2+3x+6=0$;

(0.) $x^2+2x+7=0$.

Список литературы

[1] Воеводин, В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — М.: Наука, 1980. - 400 с.

[2] Линейная зависимость: методическое указание для практических занятий по курсу «Алгебра и теория чисел»/ Р. Ж. Алеев, О. В. Горбачева, В. В. Кораблева. — Челябинск: Челябинский государственный университет, 1989.

[3] Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: учебник для вузов / А. И. Кострикин. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[4] Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: учебник для вузов / А. И. Кострикин. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[5] Кострикин, А. И. Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. — М.: Наука, 1986.

[6] Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М.: Наука, 1971.

[7] Сборник задач по алгебре / Под. ред. А. И. Кострикина: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 464 с.

[8] Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под. ред. Ю.М. Смирнова. — М.: Логос, 2005.

[9] Первова, Е. Л. Лекции по линейной алгебре для экономистов: перестановки и матрицы / Е. Л. Первова. — www.csu.ac.ru/lectures/LinAlgEcon.pdf.

[10] Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. — М.: Наука, 1974.