Контрольная работа №2 по алгебре (гр. МПЗ-101 2008–2009 уч.год)

Номер варианта равен последней цифре порядкового номера студента в журнале.

Задание № 1.

Проверить, являются ли векторы линейно зависимыми (смотри [3]).

1. $\{a_1 = (1, -1, -2, 1),\ a_2 = (2, 2, -1, -1),\ a_3 = (1, -1, -1, 1),\ a_4 = (1, -5, -3, 4),\ a_5 = (-1, -2, 1, 1)\}$.
2. $\{a_1 = (0, -1, -2, 1),\ a_2 = (2, 1, 2, -1),\ a_3 = (1, -1, -1, 1),\ a_4 = (0, -4, -6, 4),\ a_5 = (1, -2, -1, 1)\}$.
3. $\{a_1 = (-1, 0, -1, 2),\ a_2 = (-1, 3, 2, -1),\ a_3 = (1, -3, -1, 2),\ a_4 = (2, -9, -5, 7),\ a_5 = (1, -2, 1, 1)\}$.
4. $\{a_1 = (1, 0, -1, 2),\ a_2 = (4, -6, -4, 1),\ a_3 = (2, 1, 6, 2),\ a_4 = (1, 8, 15, 5),\ a_5 = (1, -1, 1, 0)\}$.
5. $\{a_1 = (1, 1, -1, 2),\ a_2 = (3, -6, -2, 1),\ a_3 = (3, 2, 8, 2),\ a_4 = (4, 11, 17, 5),\ a_5 = (1, -1, 2, 0)\}$.
6. $\{a_1 = (1, 3, -1, 0),\ a_2 = (-3, 1, -2, 1),\ a_3 = (3, 2, -1, 2),\ a_4 = (10, 6, -1, 3),\ a_5 = (-1, -2, 1, -1)\}$.
7. $\{a_1 = (1, 3, -1, 0),\ a_2 = (2, 8, -2, 1),\ a_3 = (2, 2, -1, 2),\ a_4 = (3, -1, -1, 3),\ a_5 = (-1, -2, 1, -1)\}$.
8. $\{a_1 = (1, 3, -1, 1),\ a_2 = (10, 8, -2, 1),\ a_3 = (0, 4, -1, 12),\ a_4 = (-9, 3, -1, 24),\ a_5 = (1, -3, 1, -6)\}$.
9. $\{a_1 = (1, 3, -2, 1),\ a_2 = (3, 1, 0, 1),\ a_3 = (9, 4, -1, 4),\ a_4 = (16, 10, -4, 8),\ a_5 = (1, 0, 1, 0)\}$.
0. $\{a_1 = (1, 2, -2, 1),\ a_2 = (3, 1, 0, 1),\ a_3 = (6, 2, -1, 2),\ a_4 = (10, 5, -4, 4),\ a_5 = (1, 1, 1, 1)\}$.

Задание № 2.

Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов из задачи № 1 (смотри [3]).

Задание № 3.

Доказать, что каждая из систем векторов E и F являются базисом в $\mathbb{R}^3$, найти матрицу перехода от E к F и координаты вектора x в базисах E и F (смотри [3]).

1. $E = \{(2, 1, 2),\ (3, -1, 4),\ (2, 4, 1)\}$, $F = \{(-1, 0, 1),\ (2, 1, 0),\ (1, 2, -1)\}$, $x = (8, -4, 4)$.
2. $E = \{(3, 1, 2),\ (3, 1, 3),\ (2, 1, 0)\}$, $F = \{(-1, 0, 1),\ (2, 1, 0),\ (1, 2, -1)\}$, $x = (8, -4, 4)$.
3. $E = \{(3, 5, 4),\ (2, 2, 3),\ (1, 2, 1)\}$, $F = \{(-1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, -1)\}$, $x = (2, -4, 4)$.
4. $E = \{(2, 1, 4),\ (2, 2, 3),\ (1, 2, 1)\}$, $F = \{(-1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, -1)\}$, $x = (1, 1, 2)$.
5. $E = \{(1, 3, 4),\ (2, 3, 3),\ (1, 2, 2)\}$, $F = \{(-1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, -1)\}$, $x = (1, -1, -2)$.
6. $E = \{(2, 2, 1),\ (1, 2, 3),\ (3, 1, -4)\}$, $F = \{(-1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, -1)\}$, $x = (1, 0, -2)$.
7. $E = \{(2, 1, -5),\ (2, -2, 3),\ (-1, 2, -4)\}$, $F = \{(-1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, -1)\}$, $x = (2, 1, -2)$.
8. $E = \{(-1, 3, -2),\ (-1, 1, -1),\ (3, 2, 1)\}$, $F = \{(-1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, -1)\}$, $x = (3, -1, 3)$.
9. $E = \{(-1, 3, -2),\ (-1, 2, -1),\ (2, -2, 2)\}$, $F = \{(-1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, -1)\}$, $x = (2, -4, 4)$.
0. $E = \{(1, 2, 2),\ (-1, 3, -1),\ (2, -2, 3)\}$, $F = \{(-1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, -1)\}$, $x = (1, 2, 1)$.

Задание № 4.

Выяснить, является ли оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линейным, найти его матрицу в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$ пространства $\mathbb{R}^3$. Оператор φ задан правилом:

1. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, -x_2 + 2x_3)$.
2. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, -x_2 + 2x_3)$.
3. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 - 4x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_2 - 2x_3)$.
4. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 - 4x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 - 3x_3)$.
5. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, -x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 + x_2 - 3x_3)$.
6. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2 - 5x_3, x_1 + 5x_2 - 9x_3, 2x_2 - 4x_3)$.
7. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 - 3x_3, 2x_1 - 4x_2 + 10x_3, 2x_2 - 4x_3)$.
8. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - 4x_2 + 9x_3, 2x_2 - 4x_3)$.
9. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, 2x_1 - 4x_2 + 10x_3, 3x_2 - 6x_3)$.
0. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, -2x_1 + x_2 - 4x_3)$.

Задание № 5.
Найти базис ядра и базис образа оператора φ из задачи № 4.

Задание № 6.
Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей.

1. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 0. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Вопросы к экзамену по дисциплине “Алгебра”

1. Определение векторного пространства и подпространства. Линейная оболочка системы векторов. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Базис и размерность (доказательство корректности определения). Матрица перехода. Доказательство теоремы о свойствах матрицы перехода. Сумма и пересечение подпространств. Формулировка теоремы о размерности суммы двух подпространств (§ 1–2, гл. 1 из [2], [3]).

2. Однородная система линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Доказательство теоремы о размерности пространства решений однородной системы линейных уравнений (п. 8, §3, гл. 2 из [1]).

3. Определение линейного отображения векторных пространств. Матрица линейного отображения и ее свойства (п. 1–2, § 1, гл. 2 из [2]). Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования. Связь собственных значений линейного преобразования с корнями его характеристического многочлена (п. 3, §3, гл. 2 из [2]).

[1] А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. М.: Физико-математическая литература, 2001.

[2] А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физико-математическая литература, 2001.

[3] Линейная зависимость: методическое указание для практических занятий по курсу “Алгебра и теория чисел” / Р. Ж. Алеев, О. В. Горбачева, В. В. Кораблева. — Челябинск: Челябинский государственный университет, 1989. (http://topology.math.csu.ru/library/posob/algebra/linzav.pdf)